MAT-4173 SUPPLEMENT GUIDE.

AIRE DES TRIANGLES.

Auteur Mario Cohen C.S.M.B. Centre Outremont.

Ce supplément au guide du cours Mat-4173-2, représentation géométrique en contexte fondamental démontre les formules pour l'aire des triangles qui sont aux pages 145 et 148 de la collection Intervalle aux éditions C.E.C.

Ces énoncés sont appliqués ensuite mécaniquement sans preuve surtout que la preuve du premier énoncé est facilement assimilable par l'étudiant qui a complété un premier cours de trigonométrie. La preuve du deuxième résultat est très méconnue et n'est pas traitée dans les livres scolaires. Il existe une preuve algébrique dans l'internet qui est complexe pour le niveau de nos étudiants. Je donne une preuve alternative plus transparente, qui se base sur la loi des cosinus et des manipulations algébriques sur des différences des carrés et qui reste assimilables aux étudiants du moins je l'espère autant et qu'elle sera aussi appréciée par mes collègues.

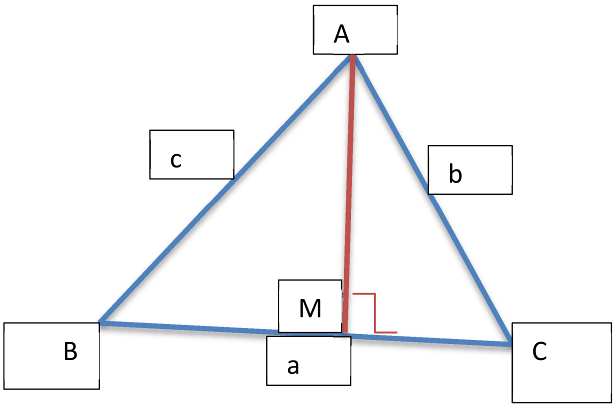
ENONCÉ I .

On peut calculer l'aire d'un triangle quelconque si l'on connait les mesures de deux de ses côtés et de l'angle qui est compris entre ces deux côtés.

L'Aire est donnée par :

$$A = \frac{ab\ sinC}{2} = \frac{ac\ sinB}{2} = \frac{bc\ sinA}{2}.$$

Preuve :



Soit le triangle ΔACB, abaissons de A la hauteur AM relative à CB (a).

L'aire du triangle, $\Delta ACB = \frac{AM \times a}{2}$ mais les deux triangles rectangles déterminés par la hauteur ABM et ACM sont rectangles donc $sinC = \frac{AH}{b}$ et $sinB = \frac{AH}{c}$.

Donc de ces deux égalités on déduit : $AH = bsinC$ et $AH = csinB$.

En remplaçant les valeurs de AH dans $\Delta ACB = \frac{AM \times a}{2}$ on a :

$$\Delta ACB = \frac{basinC}{2} = \frac{casinB}{2} .$$

Pour démontrer que $\Delta ACB = \frac{bcsinA}{2}$, il suffit d'abaisser du sommet C la hauteur relative à AB(c) et de procéder de façon identique avec le sinus de l'angle $< A$.

D'où on a prouvé que :

$$\Delta ACB = \frac{ab\ sinC}{2} = \frac{ac\ sinB}{2} = \frac{bc\ sinA}{2}.$$

ENONCÉ II.

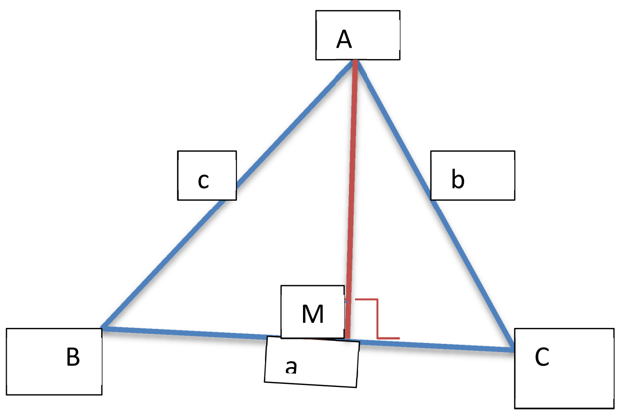
Formule de Héron.

On peut Calculer l'aire A d'un triangle quelconque ACB dont on connait les mesures des trois côtés à l'aide de la formule de Héron.

$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Où p est le demi-périmètre du rectangle ACB.

$p = \frac{a+b+c}{2}$.

Preuve de la formule de Héron.



Nous avons démontré à l'énoncé 1 que l'Aire Δ du triangle ACB est donnée par l'expression.

$\Delta = \frac{bc\ sinA}{2}$. Par la loi des cosinus dans le triangle ACB on a :

$cosA = \frac{a^2-b^2-c^2}{2bc}$. Parce que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times cosA$.

Posons $p = \frac{a+b+c}{2}$ alors on a $2p = a + b + c$.

$$2(p - a) = b + c - a.$$

$$2(p - b) = a + c - b.$$

$$2(p - c) = a + b - c.$$

L'angle A étant compris entre 0 et 180 degrés $\sin A$ est positif et est égale à $sinA = \sqrt{1 - cos^2A}$ en remplaçant $cosA = \frac{a^2-b^2-c^2}{2bc}$ dans l'expression de $sinA$ et en simplifiant on a

$sinA = \sqrt{1 - \left(\frac{a^2-b^2-c^2}{2bc}\right)^2} = \sqrt{\frac{4b^2c^2-(a^2-b^2-c^2)^2}{4b^2c^2}}$ donc

$$sinA = \sqrt{\frac{4b^2c^2 - (a^2 - b^2 - c^2)^2}{4b^2c^2}}$$

$$sinA = \sqrt{\frac{(2bc + a^2 - b^2 - c^2)(2bc - a^2 + b^2 + c^2)}{4b^2c^2}}$$

$sinA = \sqrt{\frac{(a^2-(b-c)^2)((b+c)^2-a^2)}{4b^2c^2}}$. Après factorisation des deux différences des carrés apparaissant au numérateur de la fraction sous le radical on obtient

$$sinA = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)(b+c+a)(b+c-a)}{4b^2c^2}}$$

Comme on a fait la remarque au début de la preuve

$2p = a + b + c.$ $2(p-a) = b + c - a.$ $2(p-b) = a + c - b$ et $2(p-c) = a + b - c.$

D'où

$$sinA = \sqrt{\frac{2(p-c)2(p-b)2(p)2(p-a)}{4b^2c^2}}$$

$$sinA = \sqrt{\frac{16(p-c)(p-b)(p)(p-a)}{4b^2c^2}}$$

$$sinA = \sqrt{\frac{16(p-c)(p-b)(p)(p-a)}{4b^2c^2}}$$

$$sinA = \frac{2}{bc}\sqrt{(p-c)(p-b)(p)(p-a)}$$

Donc si $\Delta = \frac{bc\ sinA}{2}$ cela entraine que

$$\Delta = \frac{bc\,\frac{2}{bc}\sqrt{(p-c)(p-b)(p)(p-a)}}{2}$$

D'où $\Delta = \sqrt{(p-c)(p-b)(p)(p-a)}$. Ce qui démontre la formule de Héron.