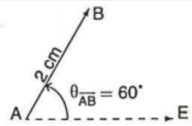
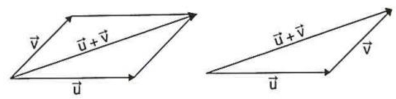
Les vecteurs

1. Description

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$, d'origine A et d'extrémité B, de module 2 cm, a une orientation de 60°.
Le module du vecteur $\overrightarrow{AB}$ se note $\|\overrightarrow{AB}\|$.
L'orientation du vecteur $\overrightarrow{AB}$ se note $\theta_{\overrightarrow{AB}}$.

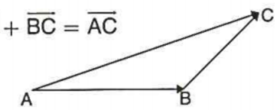


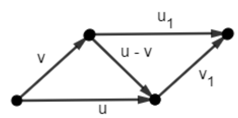
2. Addition de vecteurs



3. Relation de Chasles

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



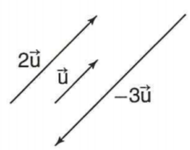


4. Soustraction de vecteurs

$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$ EX : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

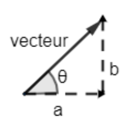
5. Multiplication par un réel

- k$\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont même direction
- k$\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont le même sens si k > 0
- k$\vec{u}$ et $\vec{u}$ sont de sens contraire si k < 0
- $\|k\vec{u}\| = |k|\|\vec{u}\|$
- Colinéaire : $\vec{u}$ = k$\vec{v}$
- Équipolents : $\vec{u}$ = $\vec{v}$ même norme, même direction



6. Composantes d'un vecteur

- **Algébrique**
  Si A (X_A, Y_A) et B (X_B, Y_B) alors $\overrightarrow{AB}$ = (X_B -X_A ,Y_B-Y_A)
- **À partir norme est angle d'orientation**
  Si $\vec{u} = (a, b)$
  $\vec{u} = (\|\vec{u}\| \cos\theta, \|\vec{u}\| \sin\theta\ )$



7. Norme d'un vecteur

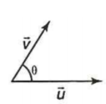
Si $\vec{u} = (a, b)$ alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

8. Opérations entre vecteurs algébriques

Si $\vec{u} = (a, b)$ et $\vec{v} = (c, d)$
- $\vec{u} + \vec{v} = (a + c,\ b + d)$
- $\vec{u} - \vec{v} = (a - c,\ b - d)$
- k$\vec{u} = (ka, kb)$ $(k \in \mathbb{R})$

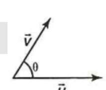
9. Produits scalaires

- Forme géométrique
  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta$
- Forme algébrique
  Si $\vec{u} = (a, b)$ et $\vec{v} = (c, d)$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v}$ = ac + bd

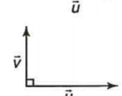


10. Angles entre deux vecteurs

- $\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$



- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ (orthogonaux)



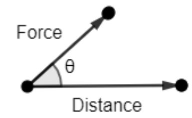
11. Combinaison linéaire

- $\|\vec{w}\| = k_1\|\vec{u}\| + k_1\|\vec{v}\|$

12. Formule travail

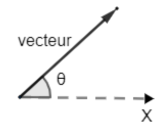
- Travail = $\overrightarrow{Force} \cdot \overrightarrow{Distance}$

Travail = $\|\overrightarrow{Force}\| \cdot \|\overrightarrow{Distance}\| \cdot \cos\theta$
(1 Joule = 1 newton· 1 mètre)

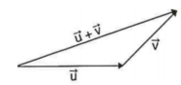


13. Résultante (étapes) : ex : $(\vec{u} + \vec{v})$

- Trouver composantes du vecteur $\vec{u} = (a_u, b_u)$
  $a_u = \|\vec{u}\| \cos\theta$ $b_u = \|\vec{u}\| \sin\theta$
- Trouver composantes du vecteur $\vec{v} = (a_v, b_v)$
  $a_v = \|\vec{v}\| \cos\theta$ $b_v = \|\vec{v}\| \sin\theta$



- Trouver composantes du vecteur
  $(\vec{u} + \vec{v}) = (a, b)$= ($a_u$+$a_v$, b_u+b_v)
- Trouver la norme de $(\vec{u} + \vec{v})$=$\|\vec{u} + \vec{v}\|$
  $\|\vec{u} + \vec{v}\|$=$\sqrt{a^2 + b^2}$

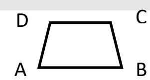


- Angle de la résultante : θ
  Tan θ $(\vec{u} + \vec{v}) = \frac{|b|}{|a|}$

Ajuster θ *selon les coordonnées (quadrant)*

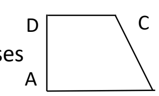
14. Démonstrations

○ Trapèze :
- 2 bases parallèles (colinéaire)



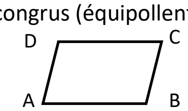
1) $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DC}$

○ Trapèze rectangle :
- 2 bases parallèles (colinéaire)
- 1 côté ⊥ (orthogonal) aux 2 bases



1) $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DC}$
2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

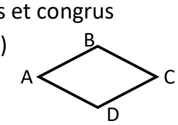
○ Parallélogramme :
- 2 paires de côtés parallèles congrus (équipollents)



1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
2) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

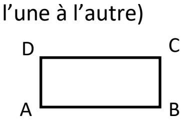
○ Losange :
- 2 paires de côtés parallèles et congrus

(équipollents de même norme)



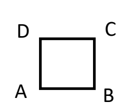
1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
2) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$
3) $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$

○ Rectangle :
- 2 paires de côtés parallèles ⊥ l'une à l'autre
  (équipollents orthogonales l'une à l'autre)



1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
2) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$
3) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

○ Carré :
- 2 paires de côtés parallèles et congrus ⊥ l'une à l'autre
  (équipollents orthogonales l'une à l'autre et même norme)



1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
2) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$
3) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$
4) $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AD}\|$

Transformations géométriques

t :(x, y)↦ $(x + h, y + k)$ *h et k ϵ $\mathbb{R}$, h déplacement horizontal et k déplacement vertical.

r_0: (x, y) ↦ $(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$
r_{90}: (x, y) ↦ $(-y, x)$ r_{180}: (x, y) ↦ $(-x, -y)$ r_{270}: (x, y) ↦ $(y, -x)$
s_x : (x, y) ↦ $(x, -y)$ s_y : (x, y) ↦ $(-x, y)$
h : (x, y) ↦ (kx, ky)
T : Transformation
$t \circ r$: (x, y) ↦ (□,□) Composition

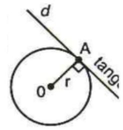
Les coniques

1. Cercle

○ Forme canonique

- Centré à l'origine : $x^2 + y^2 = r^2$
- Non centré à l'origine : $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

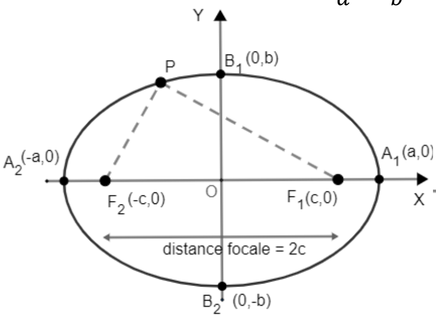
○ Forme générale : $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

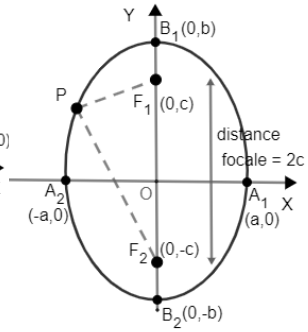


2. Ellipse

○ Centrée à l'origine :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$





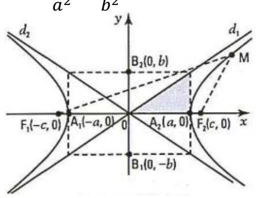
$d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a$ $\qquad$ $d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2b$

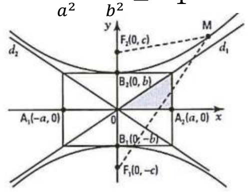
○ $c^2 = b^2 - a^2$ $\qquad$ ○ $c^2 = a^2 - b^2$

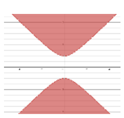
3. Hyperbole

○ Centrée à l'origine :

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\qquad$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ $\qquad$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < -1$





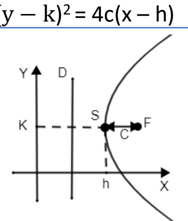
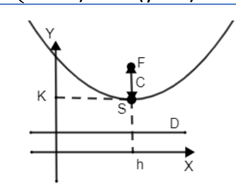
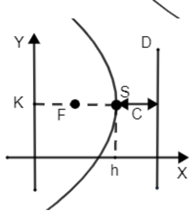
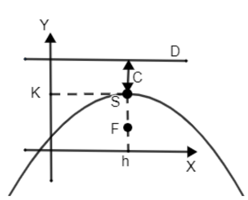


○ Pour tout point M de l'ellipse, on a : $|d(M,F_1) - d(M,F_2)| = 2a$

○ $c^2 = a^2 + b^2$

4. Parabole

○ Non centré à l'origine :

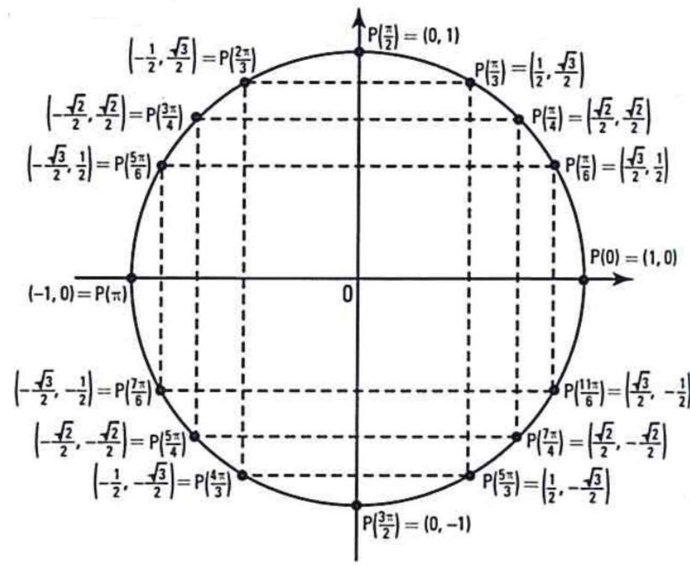
$(y-k)^2 = 4c(x-h)$	$(x-h)^2 = 4c(y-k)$
C > 0 	 C > 0
C < 0 	 C < 0
Foyer : *F (h + c, k)*	*F (h, k+ c)*
Directrice : *x = h – c*	*y = k – c*
Axe symétrie : *y = k*	*x = h*

○ Pour tout point M de la parabole :

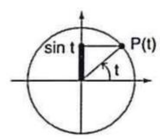
[Tapez ici] Distance (M, Foyer) = Distance (M, directrice)

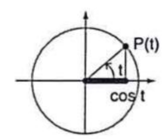
Trigonométrie

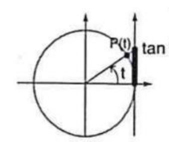
1. Cercle trigonométrique : $(\cos\theta, \sin\theta)$



2. Sinus d'un angle $\qquad$ Cosinus d'un angle $\qquad$ Tangente d'un angle







3. Identités trigonométriques

○ Rapports trigonométriques

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\qquad$ $cotan\,\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ $\qquad$ $cosec\,\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ $\qquad$ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

○ Identités trigonométriques

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ $\qquad$ $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ $\qquad$ $1 + cotan^2\theta = cosec^2\theta$

4. Formules trigonométriques

○ Formules trigonométriques

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ $\qquad$ $\cos(-\theta) = \cos\theta$ $\qquad$ $\tan(-\theta) = \tan\theta$

○ Formules de l'addition

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$$
$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$$
$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b}$$

○ Formules du double

$$\sin 2a = 2\sin a\cos a$$
$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$
$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

Par Emilie Cholette C.S.S. de la Capitale