MAT-4261

RAPPELS

1. Mode de représentation :
- Problème écrit
- Règle
- Table de valeurs
- Graphique

2. Propriétés des fonctions
- Domaine
- Codomaine (Image)
- Variations : croissance, constance et décroissance
- Les extrémums : minimum et maximum
- Les signes : positive et négative
- Coordonnées à l'origine : ordonnée à l'origine et abscisse(s) à l'origine (zéro(s) de la fonction)

3. Algèbre
- Vocabulaire : Ex : $5x + 8$
  - $5x$: terme variable
  - 8 : terme constant
  - $polynômes \begin{cases} 3x\,; & 1\ terme \rightarrow monôme \\ 2x + 3\,; & 2\ termes \rightarrow binôme \\ 2x^2 + 3x + 4\,; & 3\ termes \rightarrow trinôme \\ \ldots & \end{cases}$

- $-2^2 = -2 \cdot 2 = -4$
- $(-2)^2 = -2 \cdot -2 = 4$
- $x^a \bullet x^b = x^{a+b}$
- $x^0 = 1$
- $(x^a)^b = x^{a \bullet b}$
- $(xy)^a = x^a y^a$
- $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}; (x \neq 0)$
- $\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}; (y \neq 0)$
- $x^{-a} = \frac{1}{x^a}\ ou\ \left(\frac{1}{x}\right)^a; (x \neq 0)$
- $x^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{x^a}$

- Inéquation :

  $-2x \geq 10$

  $x \leq \frac{10}{-2}$ (si on ÷ ou **x** par un négatif, on inverse l'opérateur)

  $x \leq -5$

Division d'un polynôme par un binôme

- Exemple :

$$\begin{array}{l|l} 3x^2 + 7x + 1 & x + 2 \\ \hline -(3x^2 + 6x) & 3x + 1 \\ \quad x + 1 & \\ \quad -(x + 2) & \\ \quad\quad -1 & \end{array}$$

Réponse : $3x + 1 - \frac{1}{x+2}$

Réciproque (interchanger *x* et *y*)

- La réciproque d'une fonction constante n'est pas une fonction
- Fonction linéaire ↔ fonction linéaire
- Fonction affine ↔ fonction affine
- Fonction polynomiale de second degré ↔ fonction racine carrée
- Fonction exponentielle ↔ fonction logarithmique

Factoriser un polynôme

1. Simple mise en évidence
- Ex : $4x^2 + 8x + 6$
  $= 2(2x^2 + 4x + 3)$

2. Double mise en évidence
- Ex : $-5xy + x - 20y + 4$
  $= x(-5y + 1) + 4(-5y + 1)$
  $= (-5y + 1)(x + 4)$

3. Trinôme carrés parfaits (A et C sont des carrés)

- $Ax^2 + Bx + C$
  $= (ax + c)(ax + c)$
  $= (ax + c)^2$

$A = a^2$ $B = -2ac$ pour B < 0 $C = c^2$

- Ex : $25x^2 + 30x + 9$
  $= (5x + 3)(5x + 3)$
  $= (5x + 3)^2$

$A = 25 \quad a = 5$ $B = -30$ donc B < 0 $B = -2 \cdot 5 \cdot 3$ $C = 9 \quad c = 3$

- $Ax^2 + Bx + C$
  $= (ax - c)(ax - c)$
  $= (ax - c)^2$

$A = a^2$ $B = 2ac$ pour $B > 0$ $C = c^2$

- Ex : $25x^2 - 30x + 9$
  $= (5x - 3)(5x - 3)$
  $= (5x - 3)^2$

$A = 25 \quad a = 5$ $B = 30$ donc $B > 0$ $B = 2 \cdot 5 \cdot 3$ $C = 9 \quad c = 3$

4. Différence de carrés

- $Ax^2 - C$
  $= (ax + c)(ax - c)$

$A = a^2$ $C = c^2$

- Ex : $25x^2 - 9$
  $= (5x + 3)(5x - 3)$

$A = 25 \quad a = 5$ $C = 9 \quad c = 3$

5. Décomposition d'un trinôme (technique produit_somme)

Ne se factorise pas si : $b^2 - 4ac < 0$

- $ax^2 + bx + c$

$P = a \cdot c$ $S = b$ 2 nombres : à trouver

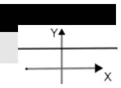
- Ex : $3x^2 + 8x + 4$
  $= 3x^2 + 6x + 2x + 4$
  $= 3x(x + 2) + 2(x + 2)$
  $= (x + 2)(3x + 2)$

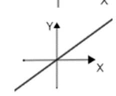
$P = 3 \cdot 4 = 12$ $S = 8$ nombres : 2 et 6

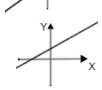
7. Simplifier des expressions rationnelles
- Factoriser numérateurs et dénominateurs
- Donner les restrictions
- Simplifier

FONCTIONS POLYNOMIALES DE 1er DEGRÉ

1. Les droites
- Fonctions constantes : $f(x) = b$
- Fonctions linéaires : $f(x) = ax$ où $a \neq 0$
- Fonction affine :
  - Forme canonique : $f(x) = ax + b$ où a et $b \neq 0$
  - Forme générale : $Ax + By + C = 0$

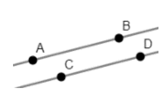






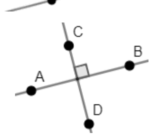
2.Pentes des droites
- A (x_1, y_1) et B (x_2, y_2)

Pente $_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$



- Droites parallèles

Pente $_{AB}$ = Pente $_{CD}$



- Droites perpendiculaires

Pente $_{AB}$ • Pente $_{CD}$ = -1

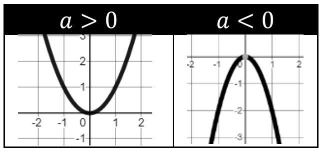
9.Résolution d'un système d'équation (1er degré à 2 variables)
- Table de valeurs
- Graphique
- Méthode de comparaison
- Méthode de substitution
- Méthode d'élimination

• $0x = 0$: infinité de solutions • $0x = 5$: aucune solution

FONCTION QUADRATIQUE (Fonction polynomiale du second degré)

○ Règle : $\boldsymbol{f(x) = a(bx)^2}$ où a et $b \neq 0$ ○ Exemple : $f(x) = 2x^2$

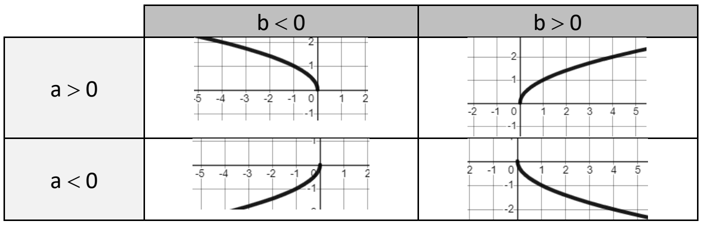
○ Représentation graphique : parabole



	x	$f(x)$		
	-3	18		
+1	-2	8	-10	
+1	-1	2	-6	+4
+1	0	0	-2	+4
+1	1	2	+2	+4
+1			+4	+4

FONCTION RACINE CARRÉE

○ $\boldsymbol{f(x) = a\sqrt{bx}}$ où $a \neq 0$ et $b \neq 0$



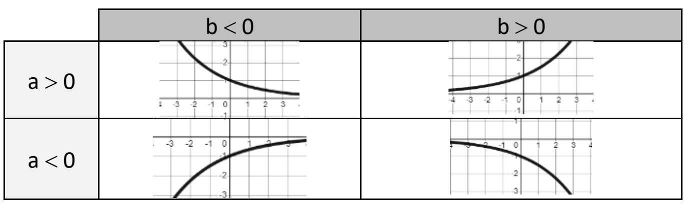
- Pour que la fonction soit bien définie : $bx \geq 0$
- si la fonction est tournée vers la droite, on utilise $b = 1$
- si la fonction est tournée vers la gauche, on utilise $b = -1$

○ Propriétés :

- $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ où $a \geq 0$ et $b \geq 0$
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ où $a \geq 0$ et $b > 0$
- $(\sqrt{a})^2 = a$ où $a \geq 0$

FONCTION EXPONENTIELLE

○ $\boldsymbol{f(x) = a(c)^{bx}}$ où $a \neq 0$ et $c > 0$



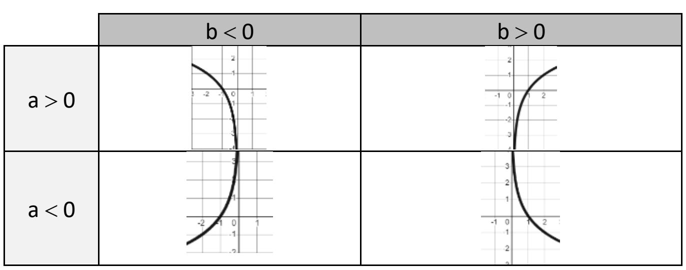
- a : valeur initiale
- b : nombre de périodes par unité de temps
- c : facteur multiplicatif

○ Propriété :
$c^u = c^v$
$u = v$

○ Ex : Une culture bactérienne renferme 120 bactéries au départ. Elle augmente de 5% chaque 2h. $f(x) = 120\,(1{,}05)^{\frac{1}{2}t}$

FONCTION LOGARITHMIQUE (base 2 et 10)

○ $\boldsymbol{f(x) = a\log_c(bx)}$ où $a \neq 0, b \neq 0, c > 0$ et $c \neq 1$



○ Définition : $\log_c p = q \quad \Leftrightarrow \quad c^q = p \quad (c > 0, c \neq 1, p > 0)$

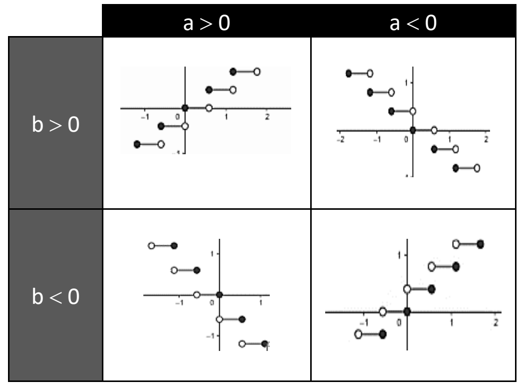
○ Propriétés :

- $\log_c 1 = 0$
- $\log_c c = 1$
- $\log_c c^n = n$
- $\log_c x = \frac{\log_m x}{\log_m c}$
- $\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$
- $\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$
- $\log_c a^n = n \log_c a$
- $\log_{\frac{1}{c}} p = -\log_c p$

FONCTION EN ESCALIER (Partie entière)

○ $f(x) = a[bx]$

- a : hauteur d'une contremarche
- b : $\frac{1}{b}$ (longueur de la marche)



Rappel :

- $[3{,}2] = 3$
- $[3{,}9] = 3$
- $[-3{,}2] = -4$
- $[-3{,}9] = -4$

FONCTION PÉRIODIQUE

○ $\boldsymbol{f(x) = f(x + T)}$

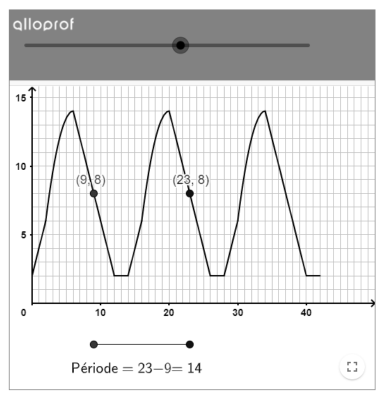
○ T : Période (longueur d'un cycle)

○ f : Fréquence (nombre de fois qu'un motif est répété par unité de temps)

○ $f = \frac{1}{T}$

○ Point hors graphique :

- nombre de périodes $= \left[\frac{valeur\ de\ x}{période}\right]$
- $nouveau\ x = Valeur\ de\ x - nombre\ de\ périodes \cdot période$



- Période : $T = 14$
- Fréquence : $f = \frac{1}{T}$

$f = \frac{1}{14}$

- Ex : $f(51) =$

$f\left(51 - \left[\frac{51}{14}\right] \cdot 14\right) =$

$f(51 - 3 \cdot 14) =$

$f(9) = f(51) = 9$

FONCTION DÉFINIE PAR PARTIES

○ Ex : $f(x) = \begin{cases} \textbf{Équations} & \textbf{Domaine} \\ 1^{re}\ partie & valeur\ de\ x \\ 2^{e}\ partie & valeur\ de\ x \\ 3^{e}\ partie & valeur\ de\ x \\ & \ldots \end{cases}$