MAT-4151

LES FONCTIONS

1. Mode de représentation :

- Problème écrit
- Règle
- Table de valeurs
- Graphique

2. Propriétés des fonctions

- **Domaine**
- Codomaine (Image)
- **Variations** : croissance, constance et décroissance
- Les extrémums : minimum et maximum
- **Les signes** : positive et négative
- Coordonnées à l'origine : ordonnée à l'origine et **abscisse(s) à l'origine** (zéro(s) de la fonction)

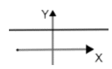
3. Rappel sur l'algèbre

- Vocabulaire : Ex : $5x + 8$
  - $5x$: terme variable
  - 8 : terme constant
  - $$polynômes \begin{cases} 3x\,; & 1\ terme \rightarrow monôme \\ 2x + 3\,; & 2\ termes \rightarrow binôme \\ 2x^2 + 3x + 4\,; & 3\ termes \rightarrow trinôme \\ & \dots \end{cases}$$

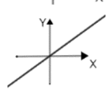
LES DROITES (*Fonctions polynomiales du premier degré)*

1. Équation d'une droite

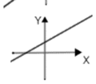
- Fonctions constantes : $f(x) = b$



- Fonctions linéaires : $f(x) = ax$



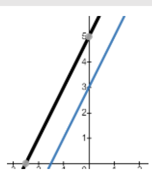
- Fonctions affines : $f(x) = ax + b$



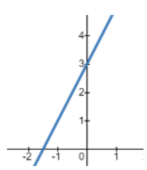
- Paramètre $\boldsymbol{a}$: pente (inclinaison de la droite)
  A (x_1, y_1) et B (x_2, y_2)
  Pente $_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \boldsymbol{a}$
- Paramètre $\boldsymbol{b}$: valeur initiale (ordonnée à l'origine)

2. Position relative des droites

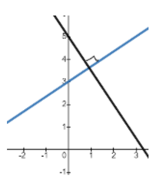
- Droites parallèles distinctes : $d_1 \parallel d_2$
  - $a_1 = a_2$
  - $b_1 \neq b_2$
  - $Ex : d_1 : y = 2x + 3$
    $d_2 : y = 2x + 5$



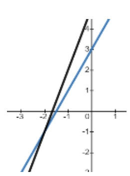
- Droites parallèles confondues :
  - $a_1 = a_2$
  - $b_1 = b_2$
  - $Ex : d_1 : y = 2x + 3$
    $d_2 : y = \frac{4}{2}x + 3$



- Droites perpendiculaires : $d_1 \perp d_2$
  - $a_1 = \frac{-1}{a_2}$ ou $a_1 \cdot a_2 = -1$
  - $Ex : d_1 : y = \frac{2}{3}x + 3$
    $d_2 : y = \frac{-3}{2}x + 5$



- Droites sécantes :
  - $a_1 \neq a_2$
  - $Ex : d_1 : y = 2x + 3$
    $d_2 : y = 3x + 5$



3. Résolution d'un système d'équations (1er degré à 2 variables)

- Table de valeurs
- Graphique
- Méthode de comparaison :
  ❶ **Isole** la même variable dans chaque équation
  ❷ **Compare** les 2 expressions
  ❸ **Résous** l'équation (Trouve la valeur d'une variable)
  ❹ **Calcule** la valeur de la 2e variable
  ❺ **Vérifie** le couple solution (x, y)

❶ $y_1 = 2x + 2$ et $y_2 = 3x - 5$

❷ $y_1 = y_2$
$2x + 2 = 3x - 5$
❸ $2 + 5 = 3x - 2x$
$7 = x$

❹ $y_1 = 2x + 2$
$y_1 = 2 \cdot 7 + 2$
$y_1 = 16$

❺ $y_2 = 3x - 5$
$y_2 = 3 \cdot 7 - 5$
$y_2 = 16$
Couple solution : (7, 16)

- Méthode de substitution :
  ❶ **Isole** une variable dans une équation
  ❷ **Substitue** cette variable par la 2e équation
  ❸ **Résous** l'équation (Trouve la valeur d'une variable)
  ❹ **Calcule** la valeur de la 2e variable
  ❺ **Vérifie** le couple solution (x, y)

❶ $y_1 = 2x + 2$ et $y_2 + 5 = 3x$

❷ $y_2 + 5 = 3x$
$(2x + 2) + 5 = 3x$
❸ $2x + 7 = 3x$
$7 = 3x - 2x$
$7 = x$

❹ $y_1 = 2x + 2$
$y_1 = 2 \cdot 7 + 2$
$y_1 = 16$

❺ $y_2 + 5 = 3x$
$16 + 5 = 3 \cdot 7$
$21 = 21$
Couple solution : (7, 16)

- Méthode d'élimination :
  ❶ **Transforme** les équations sous la forme : $Ax + By = C$
  ❷ **Exprime** les coefficients (A, B et C) en nombre entier
  ❸ **Choisi** la variable à éliminer
  ❹ **Transforme** les équations (variable à éliminer : coefficients opposés)
  ❺ **Additionne** les 2 équations
  ❻ **Résous** l'équation (Trouve la valeur d'une variable)
  ❼ **Calcule** la valeur de la 2e variable
  ❽ **Vérifie** le couple solution (x, y)

❶ $y = 2x + 2$ et $\frac{3x}{5} - \frac{y}{5} = 1$

❷❸❹ $2x - y = -2$
$\left(\frac{3x}{5} - \frac{y}{5} = 1\right) \cdot (-5)$

❺❻
$$\begin{array}{r} 2x - y = -2 \\ \oplus \quad -3x + y = -5 \\ \hline -x = -7 \\ x = 7 \end{array}$$

❼ $y_1 = 2x + 2$
$y_1 = 2 \cdot 7 + 2$
$y_1 = 16$

❽
$\frac{3x}{5} - \frac{y}{5} = 1$
$\frac{3 \cdot 7}{5} - \frac{16}{5} = 1$
$1 = 1$
Couple solution : (7, 16)

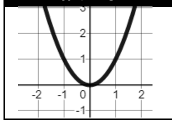
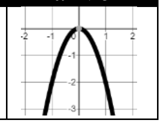
- Attention :
  - $0x = 0$ ou $0y = 0$: infinité de solutions
  - $0x = 5$ ou $0y = 5$: aucune solution

4. Réciproque (interchanger *x* et *y*)

- La réciproque d'une fonction constante n'est pas une fonction
- La réciproque d'une fonction linéaire est toujours une fonction linéaire
- La réciproque d'une fonction affine est toujours une fonction affine

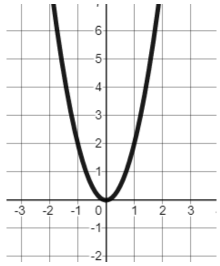
FONCTION QUADRATIQUE (Fonction polynomiale du second degré)

- Règle : $f(x) = ax^2$ où $a \neq 0$
- Représentation graphique : parabole

$a > 0$	$a < 0$
	

- Exemple : $f(x) = 2x^2$

	x	$f(x)$		
	-3	18		
+1	-2	8	-10	
+1	-1	2	-6	+4
+1	0	0	-2	+4
+1	1	2	+2	+4
+1	2	8	+4	+4
+1	3	18	+10	+4



- Trouver la règle :

Ex : $f(x) = ax^2$ où $a \neq 0$
avec $(2, 8)$

$$8 = a \cdot 2^2$$
$$8 = a \cdot 4$$
$$\frac{8}{4} = a$$
$$2 = a$$
$$f(x) = 2x^2 \text{ où } a \neq 0$$

- Trouver la valeur de x :

Ex : $f(x) = 2x^2$

$$f(x) = 8$$
$$8 = 2 \cdot x^2$$
$$\frac{8}{2} = x^2$$
$$4 = x^2$$
$$\sqrt{4} = x$$
$$\pm 2 = x$$
$$x_1 = 2 \quad et \quad x_2 = -2$$

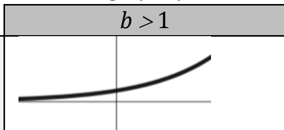
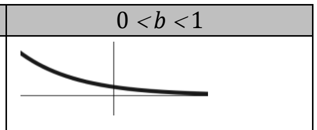
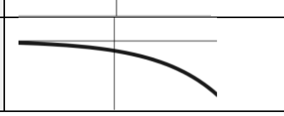
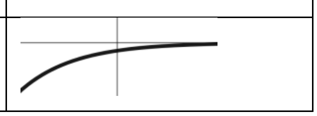
FONCTION EXPONENTIELLE

1. Rappel :

- $x^2 : x \ au \ carré$
- $x^3 : x \ au \ cube$
- $\sqrt{x} : racine \ carrée \ de \ x$
- $\sqrt[3]{x} : racine \ cubique \ de \ x$
- $-2^2 = -2 \cdot 2 = -4$
- $(-2)^2 = -2 \cdot -2 = 4$
- $x^a \bullet x^b = x^{a+b}$
- $x^0 = 1$
- $(x^a)^b = x^{a \bullet b}$
- $(xy)^a = x^a y^a$
- $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}; (x \neq 0)$
- $\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}; (y \neq 0)$
- $x^{-a} = \frac{1}{x^a} \ ou \ \left(\frac{1}{x}\right)^a ; (x \neq 0)$
- $x^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{x^a}$

2. Fonction exponentielle :

- Règle : $f(x) = ab^x$ où $a \neq 0, b > 0 \ et \ b \neq 1$
  - a : valeur initiale
- Représentation graphique :

	$b > 1$	$0 < b < 1$
$a > 0$		
$a < 0$		

- Exemple :

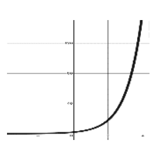
	x	$f(x)$	
	-2	0,22	
+1	-1	0,67	x 3
+1	0	2	x 3
+1	1	6	x 3
+1	2	18	x 3
+1	3	54	x 3
+1	4	162	x 3

Ex : $(2, 18)$ et $(3, 54)$

$$f(x) = ab^x$$
$$18 = ab^2$$
$$54 = ab^3$$
$$\frac{54}{18} = \frac{ab^3}{ab^2}$$
$$3 = b$$

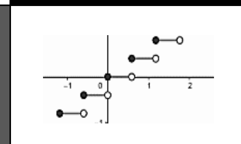
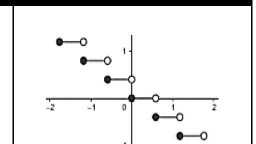
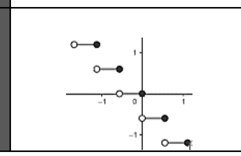
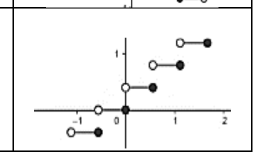
$$f(x) = a3^x$$
$$18 = a3^2$$
$$18 = a9$$
$$\frac{18}{9} = a$$
$$2 = a$$

$$f(x) = 2 \cdot 3^x$$



FONCTION PARTIE ENTIÈRE (En escalier)

- $f(x) = a[bx]$
  - a : hauteur d'une contremarche
  - b : $\frac{1}{b} \rightarrow Longeur \ d'une \ marche$

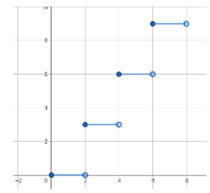
	a > 0	a < 0
b > 0		
b < 0		

Rappel :
- $[3,2] = 3$
- $[3,9] = 3$
- $[-3,2] = -4$
- $[-3,9] = -4$

- Exemple :

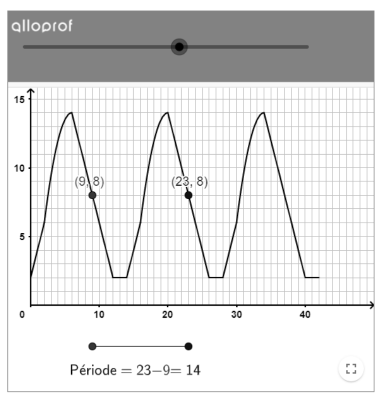
x	$f(x)$
$[0,2[$	0
$[2,4[$	3
$[4,6[$	6
$[6,8[$	9

$$f(x) = a[bx]$$
$$a = 3$$
$$b = \frac{1}{2}$$
$$f(x) = 3\left[\frac{1}{2}x\right]$$



FONCTION PÉRIODIQUE

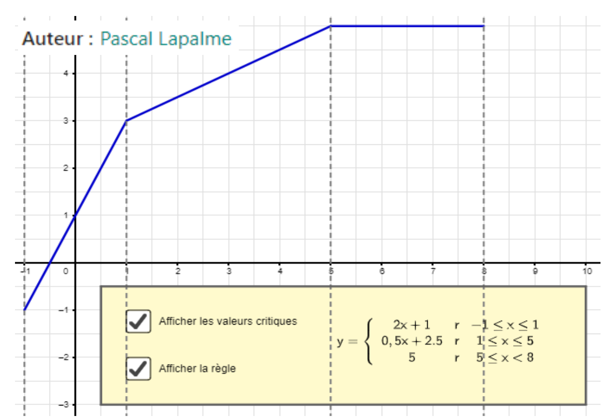
- $f(x) = f(x + T)$
- T : Période (longueur d'un cycle)
- f : Fréquence (nombre de fois qu'un motif est répété par unité de temps)
- $f = \frac{1}{T}$
- Point hors graphique :
  - nombre de périodes $= \left[\frac{valeur \ de \ x}{période}\right]$
  - $nouveau \ x = Valeur \ de \ x - nombre \ de \ périodes \cdot période$



- Période : $T = 14$
- Fréquence : $f = \frac{1}{T}$
  $f = \frac{1}{14}$
- Ex : $f(51) =$
  $f\left(51 - \left[\frac{51}{14}\right] \cdot 14\right) =$
  $f(51 - 3 \cdot 14) =$
  $f(9) = f(51) = 9$

FONCTION DÉFINIE PAR PARTIES

- Ex : $f(x) = \begin{cases} Équations & Domaine \\ 1^{re} \ partie & valeur \ de \ x \\ 2^e \ partie & valeur \ de \ x \\ 3^e \ partie & valeur \ de \ x \\ \ldots & \end{cases}$

- 

Emilie Cholette C.S.S. de la Capitale

Référence : Allo prof et Kinésis MAT-4151