

Cours
MAT-5160-2
Optimisation en contexte appliqué

Mathématique



PRÉSENTATION DU COURS

Le but du cours *Optimisation en contexte appliqué* est de rendre l'adulte apte à traiter des situations qui requièrent l'optimisation à l'aide de la programmation linéaire, dans une perspective appliquée.

L'adulte qui suit le cours résout des situations-problèmes qui enrichissent son répertoire de stratégies. Il intègre la démarche relative à l'étude de cas. Il fait appel à des comparaisons, à la proposition de correctifs, de solutions avantageuses ou optimales ou bien à l'émission de recommandations. Il formule des critiques constructives et prend des décisions éclairées à propos de problématiques issues de divers domaines y compris celui des techniques (graphiques, biologiques, physiques, administratives, etc.). Il réinvestit ses connaissances en arithmétique et en algèbre dans différentes situations-problèmes affectées de contraintes déterminées. Ces contraintes représentent en fait des limites liées à des situations de vie réelle, dans des contextes d'optimisation. De plus, il met à profit ses connaissances en matière de résolution de systèmes d'inéquations du premier degré afin de résoudre des situations-problèmes à l'aide de la programmation linéaire. Il exploite la méthode du simplexe pour se construire des réseaux de ressources cognitives.

Au terme de ce cours, l'adulte utilisera la programmation linéaire dans le but de résoudre des situations-problèmes liées à l'optimisation. Il distinguera les données explicites et implicites de la situation, planifiera sa solution en fonction des étapes de la méthode du simplexe, mettra en œuvre sa solution (démarche et résultat) en tenant compte des contraintes et la validera en respectant le contexte de la situation.

COMPÉTENCES DISCIPLINAIRES

Pour résoudre les situations-problèmes proposées, l'adulte a recours aux trois compétences disciplinaires, soit :

- *Utiliser des stratégies de résolution de situations-problèmes;*
- *Déployer un raisonnement mathématique;*
- *Communiquer à l'aide du langage mathématique.*

L'emploi de stratégies efficaces incite l'adulte à déployer un raisonnement mathématique rigoureux et à communiquer avec clarté à l'aide du langage mathématique, en démontrant qu'il en respecte les codes et les conventions propres. C'est donc par l'activation intégrée des trois compétences disciplinaires et à l'aide d'autres ressources qu'il parvient à résoudre des situations-problèmes.

La rubrique *Démarche et stratégies* explique comment faire évoluer une situation-problème vers une solution par la mise à contribution des trois compétences disciplinaires.

DÉMARCHE ET STRATÉGIES

Pour résoudre une situation-problème, l'adulte a besoin de stratégies efficaces qu'il adapte aux situations présentées.

Il traite des situations-problèmes en utilisant une démarche qui comprend quatre phases de résolution.

- **la représentation;**
- **la planification;**
- **l'activation;**
- **la réflexion.**

Le tableau qui suit présente sommairement chacune des phases de la démarche de résolution et quelques stratégies que l'adulte peut employer pour traiter les situations. Ces phases ne se présentent pas nécessairement de façon successive. De nombreux allers-retours entre les quatre phases peuvent être nécessaires lors de la résolution d'une situation-problème.

DÉMARCHE ET STRATÉGIES	
LA REPRÉSENTATION	
<ul style="list-style-type: none"> - L'adulte prend contact avec la situation-problème afin de bien cerner le contexte, le problème et la tâche à effectuer. - Il construit sa représentation de la situation en utilisant des stratégies d'observation et de représentation, essentielles au raisonnement inductif. - Durant cette appropriation du contexte et du problème, il est aussi amené à déployer des raisonnements déductifs 	
Exemples de stratégies	<ul style="list-style-type: none"> • déterminer dans un tableau, la nature de la tâche à exécuter; • écrire littéralement les éléments de la situation qui lui semblent pertinents, facilitant ainsi la recherche des contraintes économiques ou techniques pour mathématiser le problème; • reformuler la situation dans ses propres mots et comparer sa compréhension du problème à celle de ses pairs ou encore à celle de l'enseignante ou enseignant; • décrire les caractéristiques de la situation; • déterminer des questions en rapport avec celle-ci.
LA PLANIFICATION	
<ul style="list-style-type: none"> - Pour planifier sa solution, l'adulte cherche des pistes et privilégie celles qui semblent les plus efficaces et économiques. - Une planification correcte implique de sa part le décodage des éléments du langage mathématique, le sens des symboles et des termes, les notations. 	
Exemples de stratégies	<ul style="list-style-type: none"> • rechercher une règle algébrique qui tiendrait compte de la meilleure relation entre les contraintes et les conséquences imposées par la situation-problème : déterminer les paramètres pertinents de la droite baladeuse ou de la fonction économique; • tracer une esquisse de plan cartésien.
L'ACTIVATION	
<ul style="list-style-type: none"> - Placé au cœur du traitement d'une situation-problème, l'adulte déploie un raisonnement mathématique en présentant graphiquement les demi-plans issus des contraintes. - Il déduit le pas des axes en analysant les valeurs maximale et minimale que peuvent prendre les variables. - Il utilise un langage mathématique rigoureux et respecte le sens des symboles, des termes et des notations afin d'éviter la confusion. 	
Exemples de stratégies	<ul style="list-style-type: none"> • procéder par essais et erreurs pour mathématiser certaines contraintes; • faire référence à des problèmes résolus antérieurement dans le but de représenter graphiquement les demi-plans issus des contraintes; • construire des tables de valeurs afin d'avoir deux points pour représenter les droites frontières du polygone de contraintes.
LA RÉFLEXION	
<ul style="list-style-type: none"> - L'adulte adopte une attitude réflexive tout au long du traitement de la situation, se questionne régulièrement sur ses étapes de son travail et sur les choix qu'il fait. - Il fait des allers et retours sur le graphique et la fonction économique lorsque les solutions sont entières. - Il exprime ses idées en respectant les codes et les conventions mathématiques et tient compte des contraintes de la situation dans l'expression de son message. 	
Exemples de stratégies	<ul style="list-style-type: none"> • confronter ses résultats avec ceux attendus ou ceux d'autres personnes; • vérifier la cohérence de sa solution en comparant, par exemple, le nombre de solutions possibles d'un système d'équations avec le nombre de solutions trouvées ou en attestant, de façon intuitive, que les coordonnées des points trouvés sont bien celles des sommets du polygone de contraintes; • relever les stratégies utilisées pour le traitement de la situation.

COMPÉTENCES TRANSVERSALES

Les compétences transversales ne se construisent pas dans l'abstrait : elles prennent racine dans des situations-problèmes et participent, à divers degrés, au développement des compétences disciplinaires, et inversement.

Plusieurs compétences transversales peuvent être monopolisées à divers degrés dans le traitement de situations de la famille *Recherche de solutions optimales*. Le programme d'études en propose deux qui apparaissent les plus appropriées pour ce cours : *Actualiser son potentiel* et *Se donner des méthodes de travail efficaces*.

Compétence d'ordre social

L'atteinte d'un but de nature professionnelle est une préoccupation quotidienne pour l'adulte qui revient aux études. Le cours d'optimisation en contexte appliqué offre un éventail de situations d'apprentissage qui conduisent à l'accomplissement de soi. L'exploitation des métiers est souvent pour l'adulte l'occasion de réfléchir et de décider de mettre son plan professionnel en avant. De plus en plus de métiers liés au génie lui sont accessibles. Des situations d'apprentissage signifiantes et contextualisées lui permettent de déceler des capacités qui peuvent lui ouvrir de nouveaux horizons. La recherche opérationnelle et la programmation linéaire représentent une grande richesse pour ce qui est de la découverte des métiers liés à certaines techniques : l'adulte apprend à reconnaître ce qui lui est accessible. C'est en ayant l'occasion de mettre ses ressources personnelles à profit qu'il arrive à *Actualiser son potentiel*, car il importe de bien se connaître et de vouloir exploiter à fond ses capacités.

Compétence d'ordre méthodologique

Le cours d'optimisation engage l'adulte, au moyen de la programmation linéaire, à développer sa compétence à *Se donner des méthodes de travail efficaces*. En effet, ce type de programmation offre une méthode très séquentielle d'optimisation des fonctions linéaires du type $z = ax + by$ soumises à plusieurs contraintes. Dès lors, le cours d'optimisation en contexte appliqué mène l'adulte à visualiser la tâche dans son ensemble, à reconnaître, parmi de multiples possibilités, les façons de faire ou certaines méthodes qui lui conviennent mieux dans une situation particulière ou un contexte déterminé. Il peut par la suite ajuster ses actions, au besoin.

CONTENU DISCIPLINAIRE

Dans ce cours, l'adulte réactive et approfondit un ensemble de savoirs arithmétiques et algébriques acquis précédemment. Afin de traiter efficacement les situations-problèmes, il complète sa formation en s'appropriant les savoirs propres à ce cours.

Savoirs prescrits

Afin de traiter efficacement les situations d'apprentissage proposées dans ce cours, l'adulte développe le procédé intégrateur énoncé comme suit :

- **optimisation d'une situation à l'aide de la programmation linéaire.**

Ce procédé, mis en valeur dans les situations d'apprentissage du présent cours, favorise l'intégration des savoirs mathématiques et des compétences disciplinaires. Les situations d'apprentissage traitées devront toucher ce procédé intégrateur.

Savoirs mathématiques	Limites et précisions
<p>Programmation linéaire</p> <ul style="list-style-type: none"> • Système d'inéquations du premier degré à deux variables • Représentation des contraintes et de la fonction à optimiser (fonction objectif ou économique) • Détermination et interprétation des sommets et de la région solution (fermée ou non) • Modification des conditions de la situation pour la rendre plus efficiente 	<p>La représentation des contraintes peut se faire sous forme algébrique ou graphique.</p> <p>Dans ce cours, l'expression de la fonction à optimiser est limitée par une équation de la forme $Ax + By + C = Z$ dans laquelle A, B et C sont des nombres rationnels.</p>

Repères culturels

Leonhard Euler (1707-1783), mathématicien suisse qui fut un pionnier des mathématiques pures et appliquées, a laissé sa marque dans de nombreux domaines dont la théorie des nombres, la géométrie, l'optique et l'astronomie. L'origine de l'optimisation mathématique est tirée de la *Théorie de moindre action* qui traite d'un principe des plus audacieux de la science : expliquer le monde en termes d'optimisation.

La programmation linéaire, une branche de l'optimisation, trouve pour sa part sa source dans les travaux sur les systèmes d'inégalités du mathématicien français Joseph Fourier (1768-1830). Mais

la paternité de ces systèmes est attribuée au mathématicien états-unien Georges Dantzig (1914-2005). Alors qu'il était dans l'armée de l'air américaine, durant la Seconde Guerre mondiale, Dantzig mit au point la technique pour régler, à moindre coût, le problème de distribution de l'armée, mais il ne publia ses travaux qu'en 1947.

L'adulte pourrait soulever un problème fictif de distribution à plus petite échelle. La solution optimale devrait tenir compte des contraintes imposées par la situation. Il prendrait alors conscience des difficultés à surmonter pour porter secours à des victimes de catastrophe naturelle. Il comprendrait davantage l'importance de bien coordonner les actions pour sauver le plus de vies possible.

La programmation linéaire, qui allie puissance et souplesse, a été rapidement récupérée par le monde des affaires comme par celui de l'industrie. Le premier a exploité ce potentiel pour résoudre des problèmes économiques importants tandis que le second l'a mis au service de la gestion de la production.

Depuis les années 70, on trouve des applications de la programmation linéaire dans des domaines nombreux et variés comme la santé, l'environnement, l'agriculture, les communications, l'industrie pétrolière, la chimie, l'informatique, l'énergie, le transport, la production industrielle, les finances, etc. Cette percée est le fruit de l'évolution de la technologie informatique qui a permis le traitement de situations exigeant des quantités astronomiques de calculs. Des exemples donnés dans le cadre du cours permettront à l'adulte de bien saisir l'importance de la programmation linéaire dans la vie courante.

FAMILLE DE SITUATIONS D'APPRENTISSAGE

La famille *Recherche de solutions optimales* visée par ce cours regroupe les situations qui comportent un problème pouvant être traité en partie par l'optimisation, à l'aide de la programmation linéaire. Le cours *Optimisation en contexte appliqué* fournit l'occasion à l'adulte de poser des actions en vue de le rendre apte à maximiser un profit, un procédé, un nombre d'objets ou de personnes, ou encore à minimiser des coûts ou des pertes.

En traitant les situations-problèmes de ce cours, l'adulte est amené, entre autres, à cerner le lien entre les expressions littérales et les symboles d'inéquation lorsqu'il illustre son propos par des exemples de nombres, à déterminer les demi-plans qui représentent les contraintes et leur impact sur la fonction économique ou encore, à déduire certaines valeurs des points d'intersection des droites frontières, par simple substitution.

DOMAINES GÉNÉRAUX DE FORMATION

Les domaines généraux de formation couvrent les grands enjeux contemporains. Idéalement, le choix des situations à traiter doit être fait dans le respect des intentions éducatives des différents domaines généraux de formation puisque ces domaines représentent des toiles de fond sur lesquelles se greffent les situations-problèmes servant ainsi à donner du sens aux apprentissages de l'adulte. Deux de ces domaines sont particulièrement appropriés à ce cours : *Environnement et consommation* et *Orientation et entrepreneuriat*.

Environnement et consommation

L'adulte peut être amené à optimiser l'exploitation d'une terre agricole en tenant compte de la superficie réservée à certaines cultures et du coût des engrais et des fongicides. Une telle situation d'apprentissage l'amène à prendre conscience de l'interdépendance de l'environnement et de l'activité humaine, relation directement liée à l'un des axes de développement du DGF *Environnement et consommation*.

Orientation et entrepreneuriat

De nouveaux métiers sont régulièrement introduits sur le marché du travail et les défis qu'ils entraînent pour l'avenir ne cessent d'augmenter. Le cours d'optimisation en contexte appliqué pourrait permettre à l'adulte d'investiguer ces métiers en plein essor. Par exemple, la programmation linéaire peut être une porte ouverte sur l'organisation et l'analyse en génie agroalimentaire. Les situations d'apprentissage qui entraînent l'application des règles de la programmation linéaire au génie agroalimentaire proposent d'expérimenter une facette de ce métier, de mener une recherche de solutions avec la rigueur mathématique exigée. Ce type de situation d'apprentissage suggère à l'adulte d'entreprendre des projets et de mener à terme des travaux orientés vers la réalisation de soi et l'insertion dans la société, ce qui respecte l'intention éducative du DGF *Orientation et entrepreneuriat*.

EXEMPLE DE SITUATION D'APPRENTISSAGE

Toutes les situations d'apprentissage ou situations-problèmes, peu importe le domaine général de formation retenu, placent l'adulte au cœur de l'action. Elles favorisent le développement des compétences disciplinaires et transversales visées, l'acquisition de notions et de concepts mathématiques de même que la mobilisation de ressources diverses utiles à la réalisation de la tâche.

Le tableau qui suit présente les éléments nécessaires à l'élaboration de toute situation d'apprentissage ou situation-problème. On y précise ceux retenus dans l'énoncé de situation-problème décrit à la page suivante.

ÉLÉMENTS NÉCESSAIRES À L'ÉLABORATION D'UNE SITUATION D'APPRENTISSAGE, D'UNE SITUATION-PROBLÈME	
Domaine général de formation (ciblé) – Permet de contextualiser les apprentissages, de leur donner du sens.	<ul style="list-style-type: none"> • Environnement et consommation
Compétences disciplinaires (prescrites) – Se développent dans l'action. Nécessite la participation active de l'adulte.	<ul style="list-style-type: none"> • Utiliser des stratégies de résolution de situations-problèmes • Déployer un raisonnement mathématique • Communiquer à l'aide du langage mathématique
Famille de situation d'apprentissage (prescrite) – Regroupe des situations appropriées au cours à partir de problématiques tirées de la réalité. – Permet, entre autres, l'acquisition de connaissances mathématiques.	<ul style="list-style-type: none"> • Recherche de solutions optimales
Compétences transversales (ciblées) – Se développent en contexte en même temps que les compétences disciplinaires.	<ul style="list-style-type: none"> • Se donner des méthodes de travail efficaces
Savoirs essentiels (prescrits) – Sont des connaissances, des concepts, des notions mathématiques à acquérir.	<ul style="list-style-type: none"> • Voir liste

Cette rubrique propose, en fait, un exemple d'énoncé de situation-problème accompagné d'exemples d'actions associées au traitement mathématique. Il est constitué d'un contexte qui sert de fil conducteur, mais les activités d'apprentissage incluses n'y sont pas détaillées de façon formelle. L'accent est plutôt mis sur un exemple de traitement mathématique pertinent, qui respecte les quatre phases de la résolution : la représentation, la planification, l'activation et la réflexion. Toutefois, même si ce n'est pas explicite, on peut discerner les éléments qui composent cet énoncé, éléments identifiés dans le précédent tableau, soit : le domaine général de formation, les compétences disciplinaires, la famille de situation, les compétences transversales et les savoirs essentiels. Pour favoriser l'apprentissage, ces différents éléments doivent former un tout cohérent et signifiant pour l'adulte.

L'enseignante ou enseignant peut se servir de chacun des éléments comme autant d'objets de formation. Ces objets peuvent être des actions associées à chacune des phases de résolution, des actions relatives aux compétences disciplinaires ou transversales ou encore aux savoirs prescrits. L'enseignante ou enseignant a la possibilité d'utiliser l'exemple de traitement mathématique fourni pour construire d'autres tâches complexes ou d'autres activités d'apprentissage liées aux connaissances mathématiques que l'adulte doit acquérir.

Énoncé de situation-problème	Exemples d'actions associées au traitement mathématique d'une situation-problème appartenant à la famille <i>Recherche de solutions optimales</i>
<p>Un agriculteur possède une terre sur laquelle il veut semer du blé et du maïs. D'une part, il sait qu'au Québec la saison est souvent trop courte pour la culture du maïs, à moins d'ajouter de l'azote aux jeunes plants pour leur faire gagner plusieurs jours de croissance. D'autre part, le blé doit être traité pour des maladies fongiques comme la septoriose, ces maladies pouvant occasionner des pertes de l'ordre de 40 %.</p>	<p>Procédé intégrateur : <i>Optimisation d'une situation à l'aide de la programmation linéaire</i></p> <p>Au cours de l'une ou l'autre des phases de résolution, l'adulte pourrait accomplir les actions suivantes :</p> <p>Représentation</p> <ul style="list-style-type: none"> • Déterminer les éléments importants à retenir : la surface de la terre que possède l'agriculteur, le coût des produits comme la semence, le fongicide et l'engrais azoté. <p>Planification</p> <ul style="list-style-type: none"> • Diviser le problème en sous-problèmes afin de mettre en relief les relations entre les contraintes de la situation et le problème : la culture du maïs, la culture du blé, l'entretien du maïs, l'entretien du blé et les frais fixes; • Énoncer les contraintes à respecter et ce qui doit être optimisé.

Énoncé de situation-problème	Exemples d'actions associées au traitement mathématique d'une situation-problème appartenant à la famille <i>Recherche de solutions optimales</i>	
L'adulte est appelé à déterminer la superficie qui devrait être allouée à la culture du maïs et à la culture du blé pour maximiser les rendements du cultivateur. Il devra tenir compte du coût de l'engrais azoté et du fongicide, de même que du nombre d'hectares dont dispose le cultivateur.	Activation	<ul style="list-style-type: none"> • Mathématiser les contraintes relatives à la culture et à l'entretien du maïs et du blé; • Reporter ces équations sur un plan cartésien pour trouver les sommets; • Déterminer la solution optimale relative à la superficie de maïs et la superficie de blé qui apportera un rendement maximal.
	Réflexion	<ul style="list-style-type: none"> • S'assurer que la solution maximale est bien sur le sommet le plus élevé du polygone de contraintes.

ATTENTES DE FIN DE COURS

Pour traiter les situations-problèmes de la famille *Optimisation*, l'adulte optimise une situation à l'aide de la programmation linéaire. Pour ce faire, il met en œuvre les trois compétences disciplinaires du programme, soit : *Utiliser des stratégies de résolution de situations-problèmes*, *Déployer un raisonnement mathématique* et *Communiquer à l'aide du langage mathématique*.

Lorsque la programmation linéaire sert à résoudre des situations-problèmes, l'adulte met à profit divers modèles mathématiques et stratégies de différents ordres, combinant raisonnement et créativité pour surmonter les obstacles. Il décode l'information pertinente en vue de planifier la recherche d'une solution optimale. Il traduit les différentes contraintes en employant un système d'inéquations à deux variables et définit algébriquement la fonction à optimiser. Il représente graphiquement le polygone de contraintes et la région solution. Il détermine algébriquement les coordonnées des sommets à l'aide de matrices, ou par approximation à partir de graphique. Pour démontrer une conjecture, il déploie un raisonnement déductif structuré et utilise adéquatement la forme codifiée que requiert la démonstration. Il appuie son argumentation sur des illustrations, des explications ou des justifications. L'établissement de la preuve l'amène à solliciter divers types de raisonnement, dont la disjonction de cas. Il observe des situations particulières issues de la réalité et en généralise des éléments. Enfin, l'expérimentation de certaines situations le conduit à analyser des données en vue de dégager les conditions nécessaires et suffisantes pour tirer une conclusion, de prendre des décisions et de déterminer la meilleure façon de procéder, de permettre une optimisation ou une régulation.

L'adulte qui procède à des études de cas, à des synthèses, à des preuves ou à des démonstrations et à des exposés pour traiter des situations-problèmes liées à la programmation linéaire cible astucieusement l'intention des messages mathématiques à émettre ou à interpréter. Il sélectionne le médium, le type de discours et de registre de représentation adaptés à l'interlocuteur et à l'intention du message. Il effectue aisément le passage d'un registre à un autre. Il utilise un large éventail de stratégies de communication qui lui permettent, entre autres, de réguler la transmission d'un message selon les réactions spécifiques de l'interlocuteur ou pour tenir compte d'exigences nouvelles. Il s'approprie un langage qui combine de façon pertinente des termes courants, mathématiques, techniques et scientifiques.

Tout au long de sa résolution de situations-problèmes, l'adulte utilise ses connaissances sur la programmation linéaire. L'emploi des symboles, des termes et des notations liés à ces savoirs est exact et les lois, théorèmes, corollaires ou lemmes déduits ou induits par l'adulte sont toujours validés à l'aide de différentes sources afin de bonifier sa bibliothèque mathématique personnelle. De plus, il n'hésite pas à demander de l'aide lorsqu'une difficulté se présente.

CRITÈRES D'ÉVALUATION DES COMPÉTENCES VISÉES PAR LE COURS

Utiliser des stratégies de résolution de situations-problèmes

- *Manifestation, oralement ou par écrit, d'une compréhension adéquate de la situation-problème*
- *Mobilisation de stratégies et de savoirs mathématiques appropriés à la situation-problème*
- *Élaboration d'une solution* pertinente à la situation-problème*
- *Validation appropriée des étapes** de la solution élaborée*

* La solution comprend une démarche, des stratégies et un résultat.

** Le modèle mathématique, les opérations, les propriétés ou relations.

Déployer un raisonnement mathématique

- *Formulation d'une conjecture appropriée à la situation*
- *Utilisation correcte des concepts et des processus mathématiques appropriés*
- *Mise en œuvre convenable d'un raisonnement mathématique adapté à la situation*
- *Structuration adéquate des étapes d'une démarche pertinente*
- *Justification congruente des étapes d'une démarche pertinente*

Communiquer à l'aide du langage mathématique

- *Interprétation juste d'un message à caractère mathématique*
- *Production d'un message conforme à la terminologie, aux règles et aux conventions propres à la mathématique et en fonction du contexte*