Numéro 1 – 5 points *Dimension 2*

$(x-3)^2 + (y+6)^2 = 5^2$

$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 12y + 36 - 25 = 0$

$\mathbf{x^2 + y^2 - 6x + 12y + 20 = 0}$

Numéro 2 – 10 points *Dimension 7*

a) Domaine : $\mathbb{R}$
Image : $\mathbf{-\infty, -6\,] \cup [\,6, \infty}$

b) Domaine : $\mathbb{R}$
Image : $\mathbb{R}$

c) Domaine : $\mathbf{[-8, 2]}$
Image : $\mathbf{[-4, 6]}$

d) Domaine : $\mathbb{R}$
Image : $\mathbf{]\,1, \infty}$

Numéro 3 – 5 points *Dimension 3*

Centre du cercle : $(-5, -4)$
Point de tangence : $(-7, 1)$
Pente centre-point :

$$m_1 = \frac{1+4}{-7+5} = -\frac{5}{2}$$

Pente de la tangente :

$$m_2 = \frac{2}{5}$$

Calcul de « b » dans y = mx + b

$$1 = \frac{2\cdot(-7)}{5} + b$$

$$5 = -14 + 5b$$

$$b = \frac{19}{5}$$

Équation de la tangente :

$$\mathbf{y = \frac{2x}{5} + \frac{19}{5}} \text{ ou } \mathbf{2x - 5y + 19 = 0}$$

Numéro 4 – 5 points *Dimension 5*

Sommet : $(-5, -5/2)$

Foyer : $(-5, -3)$

Ouverture :

$x_F = x_S$ et $y_F < y_S$ => vers le bas

Calcul de « a » :

$a = y_F - y_S$

$$a = -3 + \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$$

Équation canonique :

$(x-h)^2 = 4 \bullet a(y-k)$

$$\mathbf{(x+5)^2 = -2\left(y + \frac{5}{2}\right)}$$

Numéro 5 – 10 points *Dimension 8*

a) Sommet : $(-9, 0)$
Foyer : $(-11{,}4\,;\,0)$
Déterminer « b » :

$b^2 = x_F{}^2 - a^2$

$b^2 = (-11{,}4)^2 - (-9)^2$

$b^2 = 48{,}96$

$b = 7$ et $a = 9$

Équation de l'hyperbole :

$$\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{49} = 1$$

Inéquation de la région :

$$\mathbf{\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{49} > 1}$$

b) a = 4 et b = 1
Équation de l'ellipse :

$$\mathbf{\frac{x^2}{16} + y^2 = 1}$$

Numéro 6 – 5 points *Dimension 9*

Conique : Parabole

Foyer : F(– 1 , 4) et directrice : x = 3

Ouverture : vers la gauche

Axe de symétrie : y = 4

Calcul de « a » :

$$a = \frac{x_F - x_D}{2}$$

$$a = \frac{-1-3}{2} = -2$$

Sommet :

$x_F = h + a \Rightarrow h = x_F - a$

$h = -1 - (-2) = 1$

$k = y_F = 4$

S(1 , 4)

Équation canonique de la parabole :

$(y-4)^2 = 4\bullet(-2)(x-1)$

$\mathbf{(y-4)^2 = -8(x-1)}$

Numéro 7 – 10 points *Dimension 10*

Forme canonique de la parabole :

$$y = \frac{x^2}{4} - 1$$

$$-\frac{x^2}{4} = -y - 1$$

$$-x^2 = -4(y+1)$$

$$x^2 = 4(y+1)$$

Sommet de la parabole : S(0 , – 1)

Recherche du rayon :

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$(x+2)^2 + (y-2)^2 = r^2$

$(0+2)^2 + (-1-2)^2 = r^2$

$4 + 9 = r^2$

$r^2 = 13 \quad (r = \sqrt{13})$

Équation générale du cercle :

$(x+2)^2 + (y-2)^2 = 13$

$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 - 13 = 0$

$\mathbf{x^2 + y^2 + 4x - 4y - 5 = 0}$

Numéro 8 – 30 points *Dimensions 1-4-6*

a) $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 11 \geq 0$

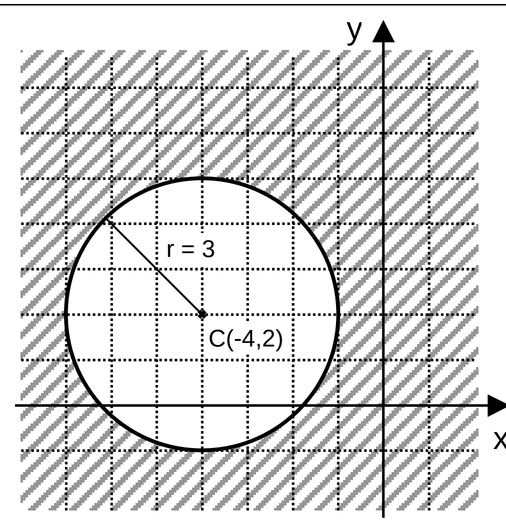
$x^2 + 8x + y^2 - 4y = -11$

$x^2 + 8x + \mathit{16} + y^2 - 4y + \mathit{4} = -11 + \mathit{16} + \mathit{4}$

$(x+4)^2 + (y-2)^2 = 3^2$

Centre : (– 4 , 2)

Rayon : 3



b) $(y+2)^2 > 6(x-1)$

Sommet : $(1, -2)$

$a = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

Ouverte vers la droite

Foyer : $(h + a, k) \Rightarrow F(\frac{5}{2}, -2)$

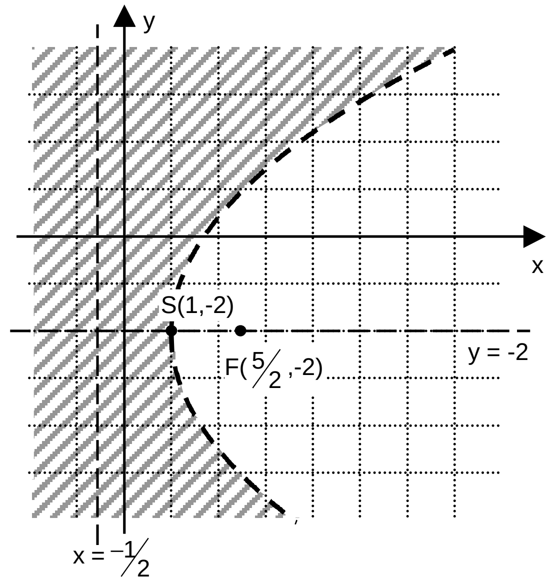
Axe de symétrie : $y = -2$

Directrice : $x = h - a \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

Vérification de la région avec (0,0) :

$(0+2)^2 \overset{?}{>} 6(0-1)$

$4 \overset{?}{>} -1 \Rightarrow$ Vrai



c) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} < 1 \Rightarrow \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} < 1$

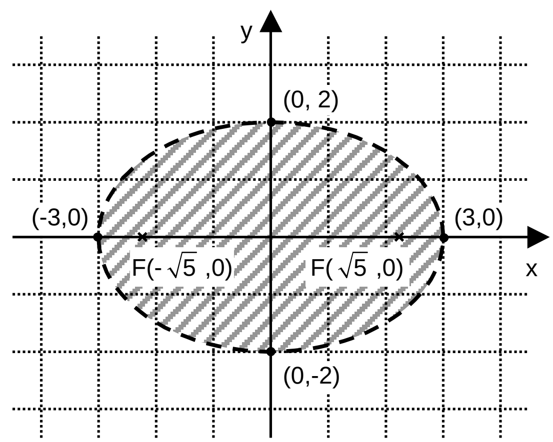
Sommets :

$(-3, 0)$ $(3, 0)$ $(0, -2)$ $(0, 2)$

Foyers :

$d^2 = 3^2 - 2^2 = 5 \Rightarrow d = \pm\sqrt{5}$

$(-\sqrt{5}, 0)$ $(\sqrt{5}, 0)$



Numéro 9 – 10 points *Dimension 11*

a) Foyer : $(36{,}1 ; 0)$

Sommet : $(36{,}1 - 6{,}1 ; 0) \Rightarrow$

$S(30, 0) \Rightarrow a = 30$

$b^2 = 36{,}1^2 - 30^2 \Rightarrow b = 20$

Équation de l'hyperbole :

$$\frac{x^2}{30^2} - \frac{y^2}{20^2} = 1$$

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{900} - \frac{y^2}{400} = 1}$$

b) Positions des joueurs :

$M(30, -20)$ et $P(-30, 20)$

Distance :

$$d = \sqrt{(30-(-30))^2 + (-20-20)^2}$$

$$d = \sqrt{(60)^2 + (-40)^2}$$

$$d = \sqrt{5200}$$

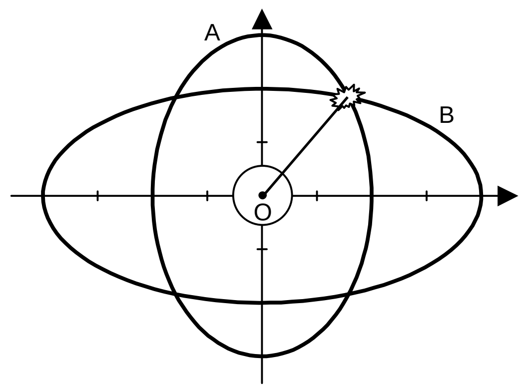
La distance entre M et P est 72,1 m.

Numéro 10 – 10 points *Dimension 12*

a) Corps céleste A :

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \quad => \quad \frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$$

Sa distance la plus petite à O est 2



Corps céleste B :

- a > b
- b = 2
- a = 4

L'équation de B :

$$\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{2^2}=1 \quad => \quad \mathbf{\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1}$$

b) Corps céleste A : $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \quad => \quad y^2=9\left(1-\frac{x^2}{4}\right)$

Corps céleste B : $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1 \quad => \quad y^2=4\left(1-\frac{x^2}{16}\right)$

La valeur de x par comparaison :

$$9\left(1-\frac{x^2}{4}\right) = 4\left(1-\frac{x^2}{16}\right)$$

$$\frac{36}{4}-\frac{9x^2}{4} = \frac{16}{4}-\frac{x^2}{4}$$

$$36-9x^2=16-x^2$$

$$-8x^2=-20$$

$$x=\pm\sqrt{2,5}$$

$$x=\pm1,58$$

La valeur de y avec l'équation de A :

$$y^2=9\left(1-\frac{1,58^2}{4}\right)$$

$$y^2=3,38$$

$$y=\pm1,84$$

La distance à O :

Une collision peut se produire à 4 endroits pour lesquels la distance à O est la même.

Par Pythagore (pour une distance à l'origine) :

$d^2 = (1,58)^2 + (1,84)^2$

$d^2 = 5,882$

$d = 2,4$

Si une collision se produisait, elle aurait lieu à 2,4 années-lumière du centre de la planète.